

CONTROLADOR ADAPTATIVO INDIRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA E ESTRUTURA VARIÁVEL: ANÁLISE DE ESTABILIDADE

JOSENALDE B. OLIVEIRA^{*}, ALDAYR D. ARAÚJO[†]

^{*}*Escola Agrícola de Jundiá – Setor de Informática - UFRN
RN 106, Km 03 – Distrito de Jundiá, 59280-000, Cx Postal 07 – Macaíba, RN, Brasil*

[†]*Departamento de Engenharia Elétrica – UFRN
59072-970 – Natal, RN, Brasil
E-mails: josenalde@gmail.com, aldayr@dca.ufrn.br*

Abstract— An indirect variable structure model reference adaptive controller (Indirect VS-MRAC) was recently proposed for relative degree one and also was suggested to be globally asymptotically stable with superior transient behavior and disturbance rejection properties. The original algorithm derived from the indirect MRAC has two inherent aspects, namely, a nested discontinuity and an algebraic loop. In this paper, the original algorithm is modified in such a way that the direct handling with these aspects may be avoided. Such a modification consists in the replacement of the plant high frequency gain switching law by a gradient integral law. The stability analysis in the presence of external bounded disturbances is developed and it is shown that the overall system error is stable with respect to some small residual set.

Keywords— variable structure systems, indirect adaptive control, stability analysis, vs-mrac

Resumo— Um controlador adaptativo indireto por modelo de referência e estrutura variável foi recentemente proposto para o caso de grau relativo unitário e as simulações sugeriram que o sistema é globalmente assintoticamente estável com comportamento transitório rápido e propriedades de rejeição a distúrbios. O algoritmo original derivado do MRAC indireto possui dois aspectos inerentes, a saber, uma descontinuidade aninhada e um loop algébrico. Neste artigo, o algoritmo original é modificado de tal modo que o trato direto com estes aspectos possa ser evitado. Tal modificação consiste em substituir a lei de adaptação descontínua para o ganho de alta frequência da planta por uma lei integral do tipo gradiente. A análise de estabilidade na presença de distúrbios externos limitados é desenvolvida e mostra-se que o erro do sistema é estável com respeito a um pequeno conjunto residual.

Palavras-chave— sistemas com estrutura variável, controle adaptativo indireto, análise de estabilidade, vs-mrac

1 Introdução

O termo VS-MRAC¹ designa a classe de controladores à estrutura variável que utiliza apenas medidas da entrada e saída da planta, inicialmente proposto por (Hsu e Costa, 1989), para grau relativo unitário, depois estendido em (Hsu, 1990), para grau relativo arbitrário. As principais características do VS-MRAC são suas notáveis propriedades de robustez e estabilidade (Costa e Hsu, 1992; Hsu, Araújo e Costa, 1994). Desde (Hsu e Costa, 1989), vários desenvolvimentos têm sido realizados e o VS-MRAC já foi aplicado há sistemas lineares e não-lineares SISO (Min e Hsu, 2000), bem como a sistemas lineares e não-lineares MIMO (Cunha, Hsu e Costa, 2003). Redução de *chattering* (Hsu, 1997) e simplificações no algoritmo para fins práticos (Hsu, Araújo e Costa, 1994) também já foram considerados. Todos estes trabalhos basearam-se na abordagem direta do controle adaptativo, onde as leis de adaptação são projetadas para os parâmetros do controlador. À medida que a ordem do sistema aumenta, o projeto do controlador pode se tornar árduo, no que diz respeito ao dimensionamento dos limitantes superiores para os

parâmetros do controlador, usados nas leis descontínuas de *adaptação* do VS-MRAC.

Visto que as expressões na condição de matching para os parâmetros do controlador (Ioannou e Sun, 1996) dependem das estimativas dos parâmetros da planta, uma estratégia natural seria utilizar os próprios parâmetros da planta como amplitudes dos relés e projetar leis descontínuas para os mesmos e não mais para os parâmetros do controlador. Desse modo, foi apresentado em (Oliveira e Araújo, 2002) um novo projeto para o VS-MRAC, desenvolvido com base na abordagem indireta do controle adaptativo. O mesmo foi denominado *VS-MRAC Indireto*. Vale salientar que a abordagem indireta está normalmente associada ao controle adaptativo por posicionamento de pólos. Da mesma forma que no VS-MRAC tradicional, simulações sugeriram um transitório rápido e robustez a distúrbios externos atuando na entrada da planta. Adicionalmente, resultados experimentais (Oliveira e Araújo, 2004), além de sua viabilidade, confirmaram sua robustez à dinâmica não modelada, embora a análise formal devesse ser investigada. A robustez do VS-MRAC tradicional a distúrbios externos e à dinâmica não modelada foi demonstrada em (Costa e Hsu, 1992), utilizando uma abordagem por perturbação singular.

As leis descontínuas do *VS-MRAC Indireto* são derivadas das leis tradicionais de adaptação para os

¹ sigla em inglês: “Variable Structure Model Reference Adaptive Control”

parâmetros da planta do MRAC indireto (Ioannou e Sun, 1996), e levam a um dimensionamento mais intuitivo para as amplitudes dos relés, uma vez que estão relacionados aos parâmetros da planta, os quais possuem incertezas mais facilmente conhecidas que no caso direto, visto que estão associados a parâmetros físicos do sistema, como coeficientes de atrito, resistências, capacitâncias, momentos de inércia etc.

A obtenção do VS-MRAC indireto a partir do MRAC indireto segue os mesmos passos do caso direto (Hsu e Costa, 1989), contudo a lei descontínua para o ganho de alta frequência da planta possui uma descontinuidade aninhada e um loop algébrico. Embora ambos os aspectos possam ser superados através de manipulações algébricas e filtragens apropriadas, objeto de trabalhos futuros, neste artigo, tal lei será substituída por uma lei contínua integral do tipo gradiente, gerando um algoritmo combinado. Esta modificação será chamada daqui em diante de modificação- k_p e a análise de estabilidade será realizada considerando a presença de distúrbios atuando na entrada da planta. Embora, em um primeiro momento, a lei gradiente esteja associada a problemas clássicos de falta de robustez, seu uso restrito a um parâmetro da planta em associação às outras leis descontínuas dos $2n - 1$ parâmetros restantes, não altera as propriedades de estabilidade e robustez do sistema geral. Estratégias de controle que associam adaptação paramétrica e síntese de sinal são comuns na literatura (Fu, 1991).

Simulações para uma planta de segunda ordem instável também serão apresentadas.

2 Formulação do Problema

2.1 Parametrização e Hipóteses

Este artigo considera o controle de plantas controláveis, observáveis, lineares, invariantes no tempo, SISO e com grau relativo unitário dadas em sua representação no espaço de estados por

$$\dot{x} = Ax + b[u + d(t)], \quad y = h^T x \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, u é a entrada, y é a saída, e d é uma perturbação atuando na entrada da planta. O modelo E/S para (1) é dado pela função de transferência

$$W(s) = h^T (sI - A)^{-1} b = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \quad (2)$$

onde k_p é o ganho de alta frequência. A matriz A e os vetores b, c possuem incertezas, mas pertencem a conjuntos conhecidos. A partir de (2), para $n^* = 1$, n_p e d_p são polinômios mônicos definidos como,

$$n_p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i} \quad (3)$$

$$d_p(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i} \quad (4)$$

O modelo de referência é definido por

$$y_m(s) = M(s)r(s), \quad M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)} \quad (5)$$

onde y_m é a saída. Assume-se que o sinal de referência r é contínuo por partes e uniformemente limitado. Assim como em (3)-(4), n_m e d_m são definidos por

$$n_m(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i} \quad (6)$$

$$d_m(s) = s^n + \alpha_{m,1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i} \quad (7)$$

De (2)-(4), o vetor com os parâmetros exatos (conhecidos) da planta (Ioannou e Sun, 1996) é definido como

$$\theta_p^* = \left[k_p^* \quad \beta^{*T} \quad \alpha_1^* \quad \alpha^{*T} \right]^T \quad (8)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ contém os elementos β_i ($i = n-1, \dots, 1$) de (3), $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ é o elemento α_1 de (4), $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$ contém os elementos α_{i+1} ($i = n-1, \dots, 1$) de (4) e, similarmente, define-se $\beta_m, \alpha_{m,1}, \alpha_m$, com respeito a (5)-(7). São feitas as seguintes hipóteses relacionadas à planta e ao modelo de referência:

- (A1) $n_p(s)$ é Hurwitz, i.e., $W(s)$ é de fase mínima;
- (A2) $\text{sign}(k_p) = \text{sign}(k_m)$ (positivo, por simplicidade, sem perda de generalidade);
- (A3) $M(s)$ tem o mesmo grau relativo de $W(s)$, $n^* = 1$, e é escolhido estritamente real positivo (ERP);
- (A4) a perturbação $d(t)$ é contínua por partes e se conhece um majorante $\bar{d}(t)$ tal que $|d(t)| \leq \bar{d}(t) \leq \bar{d}_{\text{sup}} < +\infty, \forall t \geq 0$;
- (A5) limitantes superiores para os elementos do vetor θ_p (8) são conhecidos.

As hipóteses (A1)-(A4) são usuais no MRAC. A hipótese (A5) é necessária para permitir o projeto do VS-MRAC Indireto.

O objetivo de controle é obter convergência assintótica do erro de saída

$$e_o(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9)$$

para zero ou, apesar da presença de distúrbios (uniformemente limitados mas não necessariamente pequenos), garantir que todo sinal no sistema em malha fechada permaneça uniformemente limitado e o erro de saída e_o se torne pequeno em certo sentido.

2.2 Equação do Erro

Quando a planta é perfeitamente conhecida, uma lei

de controle que casaria o sistema em malha fechada com o modelo de referência

$$y = W(s)u^* = M(s)r = y_m \quad (10)$$

seria dada pela seguinte parametrização (Sastry e Bodson, 1989)

$$u^* = \theta_{v_1}^{*T} v_1 + \theta_n^* y + \theta_{v_2}^{*T} v_2 + \theta_{2n}^* r = \theta^{*T} \omega \quad (11)$$

onde o vetor de parâmetros do controlador θ e o vetor regressor ω são dados por

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_{v_1}^{*T} & \theta_n^* & \theta_{v_2}^{*T} & \theta_{2n}^* \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} v_1^T & y & v_2^T & r \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

A partir desta parametrização do controle, é conveniente que a lei de controle satisfaça a desigualdade $\sup_t |u(t)| \leq K_\omega \sup_t \|w(t)\| + K_\delta$; $\forall t$,

onde $K_\omega, K_\delta > 0$. Isto impede o escape em tempo finito do sistema. De fato, os sinais do sistema serão regulares e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry e Bodson, 1989). Este fato não restringe a classe de sistemas que podem ser controlados, mas apenas se aplica à amplitude da lei de controle. Este limite garante que todos os sinais no sistema pertencem ao L_∞ .

De uma maneira similar ao MRAC padrão, os seguintes filtros de E/S são usados

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + g u, \quad \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + g y \quad (14)$$

onde $v_1, v_2, g = [0 \dots 0 \ \gamma]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\gamma > 0$ e Λ é escolhido tal que $\det(sI - \Lambda) = n_m(s)$, para o caso $n^* = 1$.

A equação do erro do MRAC direto com distúrbio na entrada da planta é da forma

$$\dot{e} = A_c e + \frac{k_p^*}{k_m} b_c (u - u^*) + b_d d, \quad e_o = h_c^T e \quad (15)$$

onde $e \in \mathbb{R}^{3n-2}$, $d(t)$ representa o distúrbio e $\{A_c, b_c, h_c\}$ é uma realização não-mínima de $M(s)$ com $h_c^T = [1 \ 0 \dots 0]$. Visto que o *VS-MRAC Indireto* baseia-se no MRAC indireto (Ioannou e Sun, 1996), a equação do erro (15) deve ser reescrita para incluir explicitamente os parâmetros da planta. Considerando (8) com incertezas, o vetor estimado dos parâmetros da planta é definido como

$$\hat{\theta}_p = \begin{bmatrix} \hat{k}_p & \hat{\beta}^T & \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}^T \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

e o erro nos parâmetros da planta como

$$\tilde{\theta}_p = \hat{\theta}_p - \theta_p^* \quad (18)$$

$$\tilde{k}_p = \hat{k}_p - k_p^*; \quad \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta^* \quad (19)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*; \quad \tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha^* \quad (20)$$

Usando as definições introduzidas em (3)-(4), (6)-(7) para simplificar a notação, os parâmetros do contro-

lador na condição de *matching* para $n^* = 1$ são dados por

$$\theta_{v_1}^* = \frac{\beta_m - \beta^*}{\gamma} \quad (21)$$

$$\theta_n^* = \frac{\alpha_1^* - \alpha_{m,1}}{k_p^*} \quad (22)$$

$$\theta_{v_2}^* = \frac{\alpha^* - \alpha_m + (\alpha_{m,1} - \alpha_1^*) \beta_m}{k_p^* \gamma} \quad (23)$$

$$\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p^*} \quad (24)$$

Através de uma manipulação algébrica e usando (19)-(20) e (21)-(24), a equação do erro se torna (Ioannou e Sun, 1996)

$$\dot{e} = \frac{b_c}{k_m} \left(\tilde{k}_p \zeta_p + k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right) \quad (25)$$

$$+ A_c e + b_d d, \quad e_o = h_c^T e$$

onde define-se

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_p & k_p^* \zeta_\beta^T & \zeta_1 & \zeta_\alpha^T \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

como um vetor de sinais auxiliares introduzido a fim de simplificar a notação, e seus elementos são dados por

$$\zeta_p = \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma_p} - u - \frac{\hat{\beta}^T v_1}{\gamma_p} \quad (27)$$

$$\zeta_\beta^T = \begin{bmatrix} \zeta_{\beta_1} & \dots & \zeta_{\beta_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad \zeta_{\beta_i} = \frac{-v_{1,i}}{\gamma} \quad (28)$$

$$\zeta_1 = y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma_1} \quad (29)$$

$$\zeta_\alpha^T = \begin{bmatrix} \zeta_{\alpha_2} & \dots & \zeta_{\alpha_n} \end{bmatrix}, \quad \zeta_{\alpha_i} = \frac{v_{2,i-1}}{\gamma} \quad (30)$$

com $\zeta_p, \zeta_1 \in \mathbb{R}$, $\zeta_\alpha, \zeta_\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\gamma, \gamma_1, \gamma_p > 0$.

Definindo,

$$\tilde{\theta}_p = \begin{bmatrix} \tilde{k}_p & \tilde{\beta}^T & \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}^T \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

e usando (26), a equação do erro (25) pode ser escrita como

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} (\tilde{\theta}_p^T \zeta) + b_d d \quad (32)$$

3 Projeto do VS-MRAC Indireto

Recentemente (Oliveira e Araújo, 2002), foi proposto um controlador similar ao VS-MRAC (Hsu e Costa, 1989), mas com as leis descontínuas projetadas para os parâmetros da planta, enquanto que no caso direto as mesmas são projetadas para os parâmetros do controlador. A idéia era simplificar o projeto, visto que as incertezas nos parâmetros da planta podem ser conhecidas mais facilmente que no VS-

MRAC tradicional. Do mesmo modo que no MRAC indireto, as *estimativas* dos parâmetros da planta geradas pelas leis descontínuas são posteriormente usadas nas expressões para os parâmetros do controlador (21)-(24), substituindo os valores exatos por suas respectivas estimativas, que são então usadas para sintetizar o sinal de controle (11). Em (Oliveira e Araújo, 2002), foram propostas as seguintes leis descontínuas para (17):

$$\hat{k}_p = k_p^{\text{nom}} - \bar{k}_p \text{sign}(e_o \zeta_p) \quad (33)$$

$$\hat{\beta}_i = -\bar{\beta}_i \text{sign}(e_o \zeta_{\beta_i}), i = 1, \dots, n-1 \quad (34)$$

$$\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{sign}(e_o \zeta_1) \quad (35)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\bar{\alpha}_i \text{sign}(e_o \zeta_{\alpha_i}), i = 2, \dots, n \quad (36)$$

onde os sinais auxiliares ζ (26) são definidos como em (27)-(30) e k_p^{nom} foi introduzido para garantir a hipótese (A2). Observa-se que a expressão para o ganho de alta frequência (33) depende de ζ_p , que, de acordo com (27), é uma função de u , que ainda não é disponível, visto que é a saída do algoritmo do controlador. Esta situação gera o fenômeno bem conhecido chamado de *loop algébrico*, o qual foi superado em (Oliveira e Araújo, 2002) através da substituição do sinal de controle u em (26) por um sinal filtrado do mesmo. A descontinuidade aninhada está no fato de (26) em (33) ser função de (34), não sendo definida para funções descontínuas, embora também possa ser superada através de filtrações apropriadas.

Neste artigo, se propõe usar, ao invés de (33), a seguinte lei integral do tipo gradiente (Ioannou e Sun, 1996):

$$\dot{\hat{k}}_p = \begin{cases} -\gamma_p e_o \zeta_p & \text{se } |\hat{k}_p| > k_0 \text{ ou} \\ & \text{se } |\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (37)$$

onde $\hat{k}_p(0) \geq k_0 > 0$ e k_0 é um limitante inferior conhecido para $|k_p^*|$. Portanto, (34)-(36) e (27)-(30) permanecem os mesmos.

Com esta modificação, chamada modificação- k_p , a análise de estabilidade pode ser desenvolvida. Como será mostrado, tal modificação não afeta ou degenera as propriedades esperadas para sistemas a estrutura variável. No restante deste artigo será desenvolvida a análise de estabilidade do *VS-MRAC Indireto* com tal modificação.

4 Análise de Estabilidade

No que segue, c_i denota constantes positivas adequadas.

Teorema 1 Considere o sistema (1), o erro geral do

sistema (25), as leis descontínuas (34)-(36) e a lei integral (37). Se todas as hipóteses (A1)-(A5) são satisfeitas, e, em (34)-(36)

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_1 > |\alpha_1^*| \\ \bar{\beta}_i > |\beta_i^*|, i = 1, \dots, n-1 \\ \bar{\alpha}_i > |\alpha_i^*|, i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (38)$$

toda trajetória do sistema entra em um conjunto residual compacto invariante

$$D_R = \left\{ (e, \tilde{k}_p) : V(e, \tilde{k}_p) \leq (c_1 \bar{d}^2 + c_2 \tilde{k}_p^2 + \delta) \right\}$$

em um tempo finito, onde $\delta > 0$ é arbitrariamente pequeno.

Prova Seja a candidata à função de Lyapunov

$$2V(e, \tilde{k}_p) = \begin{bmatrix} e^T & \tilde{k}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & (\gamma_p k_m)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{k}_p \end{bmatrix} \quad (39)$$

A partir de (37) tem-se dois casos a considerar.

Caso 1) $\dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_o \zeta_p$, $\gamma_p > 0$

Desenvolvendo $\dot{V}(e, \tilde{k}_p)$ ao longo das trajetórias do sistema (25), tem-se

$$\dot{V} = -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} (k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha) + e^T P b_d d \quad (40)$$

onde $Q = Q^T > 0$ e $P = P^T > 0$ satisfazem

$$A_c^T P + P A_c = -2Q \quad (41)$$

Considere o termo $\frac{e_o}{k_m} (k_p^* \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha)$ de

(40) e as leis descontínuas (34)-(36). Se as condições suficientes (38) forem satisfeitas, este termo se torna negativo, com já foi demonstrado em (Oliveira e Araújo, 2002). Analisando agora os termos restantes em (40):

Seja

$$e^T P b_d d = b_d^T P e \leq \|b_d^T P\| \|e\| \bar{d} = c_1 \|e\| \bar{d} \quad (42)$$

e

$$-e^T Q e \leq -c_2 e^T e = -c_2 \|e\|^2 \quad (43)$$

Usando os limitantes superiores adequados de (42) e (43) em (40), tem-se

$$\dot{V} \leq -c_2 \|e\|^2 + R + c_1 \|e\| \bar{d} \quad (44)$$

onde $R < 0$ representa o segundo termo de (40) já demonstrado ser negativo. Isolando $\|e\|$ em (44),

$$\dot{V} \leq \|e\| (-c_2 \|e\| + c_1 \bar{d}) \quad (45)$$

De (45) conclui-se que $\dot{V} < 0$ fora da bola,

$$D = \left\{ (e, \tilde{k}_p) : \|e\| \leq \frac{c_1}{c_2} \bar{d} \right\}. \quad (46)$$

Agora, para mostrar que qualquer trajetória do sistema entra em um domínio residual da forma $D_R = \left\{ (e, \tilde{k}_p) : V(e, \tilde{k}_p) \leq k_R \right\}$ em um tempo finito,

deve-se estimar a constante $k_R > 0$ tal que no conjunto $W_R = \{(e, \tilde{k}_p) : V(e, \tilde{k}_p) \geq k_R\}$ tem-se $\dot{V} \leq -\delta_R$ para alguma constante $\delta_R > 0$. Considere um limitante superior para a função de Lyapunov (39) dado por $V(e, \tilde{k}_p) \leq c_3 \|e\|^2 + c_4 \tilde{k}_p^2$. Então, usando o limitante superior (46) para $\|e\|$, tem-se que $D \subset \bar{D} = \{(e, \tilde{k}_p) : c_3 \|e\|^2 + c_4 \tilde{k}_p^2 \leq c_5 \bar{d}^2 + c_4 \tilde{k}_p^2\}$. Assim, uma possível escolha para k_R é

$$k_R = c_5 \bar{d}^2 + c_4 \tilde{k}_p^2 + \delta,$$

Com $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, que garante que $D \subset \bar{D} \subset D_R$ e \dot{V} é estritamente negativa em W_R .

Caso 2) $\dot{k}_p = 0$

A partir de (39), \dot{V} se torna

$$\dot{V} = -e^T Q e + \frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m} + e^T P b_d d \quad (47)$$

O primeiro e o terceiro termo em (47) são analisados como no caso 1. Para $\frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m}$, de (A2), $k_m > 0$ e,

considerando a situação em (37), quando $\dot{k}_p = 0$, como

$$e_o \zeta_p > 0 \text{ e } \left| \dot{k}_p \right| = k_0 \quad (48)$$

tem-se

$$e_o \zeta_p > 0 \Rightarrow \dot{k}_p = k_0 \Rightarrow \tilde{k}_p < 0 \Rightarrow \frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m} < 0$$

e, conseqüentemente, (46) também é válido.

■

Corolário 1 Se $\|\zeta_r(t)\| > k_d \bar{d} + k_\zeta \left| \tilde{k}_p \right| \bar{\zeta}_p \quad \forall t \geq T$, T finito, então o erro de saída nulo se torna uma superfície deslizante, onde ζ_r é o vetor ζ (26) sem o elemento ζ_p . $k_d, k_\zeta > 0$ são constantes adequadas e $\bar{\zeta}_p$ é um limitante superior para o sinal ζ_p (27) assumido conhecido pela hipótese (A6).

Prova Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$2V(e_o) = e_o^2 \quad (49)$$

que possui derivada

$$\dot{V}(e_o) = e_o \dot{e}_o, \quad \dot{e}_o = h_c^T \dot{e} \quad (50)$$

Substituindo (32) em (50), tem-se

$$\dot{V} = e_o \left[h_c^T A_c e + \frac{h_c^T b_c}{k_m} (\tilde{\theta}_p^T \zeta) + h_c^T b_d d \right] \quad (51)$$

A fim de separar os parâmetros da planta com leis descontínuas do ganho de alta frequência, o elemento

\tilde{k}_p é retirado de (31) gerando o vetor $\tilde{\theta}_{p_r}$ e o elemento ζ_p é retirado de (26) gerando o vetor ζ_r . Usando limitantes superiores adequados para (51), a desigualdade

$$\dot{V} \leq |e_o| \left[c_3 \|e\| + c_4 (\tilde{\theta}_{p_r}^T \zeta_r) + c_5 \bar{d} + c_6 \left| \tilde{k}_p \right| \bar{\zeta}_p \right]$$

Se torna, para $t \geq T$, T finito, usando $\|e\|$ conforme (46),

$$\dot{V} = e_o \dot{e}_o \leq |e_o| \left[c_7 \bar{d} + c_4 (\tilde{\theta}_{p_r}^T \zeta_r) + c_6 \left| \tilde{k}_p \right| \bar{\zeta}_p \right] \quad (52)$$

Para garantir que $e_o \dot{e}_o < 0$, através de uma manipulação algébrica em $\tilde{\theta}_{p_r}^T \zeta_r$ em (52), tem-se

$$\dot{V} = e_o \dot{e}_o \leq |e_o| \left[c_7 \bar{d} - c_8 \|\zeta_r\| + c_6 \left| \tilde{k}_p \right| \bar{\zeta}_p \right] \quad (53)$$

Portanto, se $\|\zeta_r\|$ é suficientemente grande para garantir $e_o \dot{e}_o < 0$ então $\{e : e_o = h_c^T e = 0\}$ se torna uma superfície deslizante e $e_o(t)$ se torna nulo em tempo finito, apesar da presença do distúrbio d .

■

5 Resultados de Simulações

Usando a notação introduzida em (2)-(7), seja

$$W(s) = k_p \frac{s + \beta_1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s - 10}$$

$$M(s) = \frac{k_m}{s + \alpha_{m,1}} = \frac{1}{s + 1}$$

Filtros E/S: $\dot{v}_1 = -v_1 + u$, $\dot{v}_2 = -v_2 + y$

As amplitudes dos relés para (34)-(36) são facilmente dimensionados a partir de $W(s)$, obedecendo as condições suficientes dadas em (38), ou seja, $\bar{\beta}_1 = 3.5$, $\bar{\alpha}_1 = 3.5$, $\bar{\alpha}_2 = 11$. Adicionalmente, foram utilizados os parâmetros de projeto $\gamma_p = \gamma_1 = \gamma = 1$ e $k_0 = 10^{-3}$, $\hat{k}_p(0) = k_0 + 0.5$. O passo de integração é $h = 10^{-3}$ e as derivadas são aproximadas pelo método de Euler.

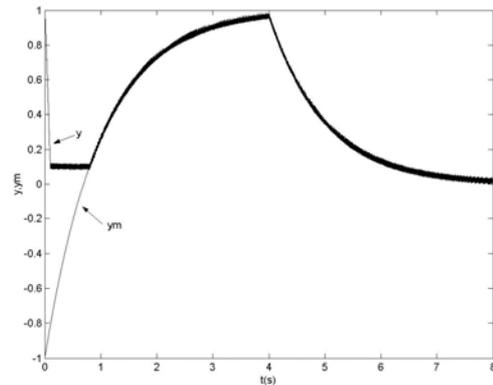


Fig 1. Caso ideal ($d=0$)

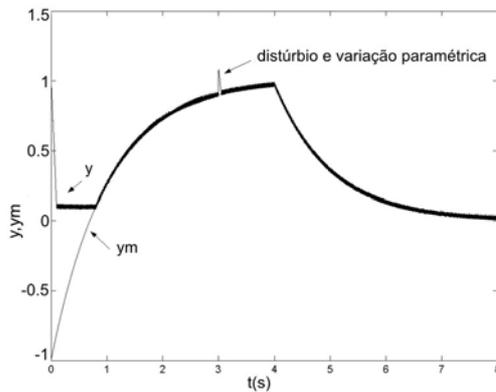


Fig 2. Rejeição ao distúrbio e à variação paramétrica

A Fig. 1 apresenta o excelente desempenho do VS-MRAC indireto na ausência de distúrbios. A Fig. 2 mostra a rápida rejeição ao distúrbio do tipo degrau ($d=2.5$) e a uma variação paramétrica de +20% introduzida simultaneamente ao distúrbio em $t=3s$, para $y(0)=1$ e $y_m(0)=-1$.

Portanto, verifica-se que a modificação- k_p não altera as propriedades dos sistemas com estrutura variável, notadamente o rápido transitório, embora o erro do sistema em regime permanente seja função do erro de adaptação em k_p .

6 Conclusões

O VS-MRAC Indireto se mostrou notavelmente robusto com respeito a distúrbios externos e, em certo sentido, à dinâmica não modelada, visto que resultados prévios sugeriram um bom desempenho. Neste artigo, a análise de estabilidade na presença de distúrbios na entrada da planta foi desenvolvida e foi mostrado que o erro do sistema é estável com respeito a um pequeno conjunto residual. Adicionalmente, o erro de saída se torna nulo em um tempo finito, apesar da presença do distúrbio. A lei descontínua para o ganho de alta frequência foi substituída por uma lei de adaptação integral (modificação- k_p), não afetando o transitório rápido dos sistemas com estrutura variável.

Referências Bibliográficas

Costa, R. e Hsu, L. (1992). Robustness of VS-MRAC with respect to unmodeled dynamics and external disturbances, *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.*, vol. 6, pp. 19-33.

Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Costa, R. e Lizarralde, F. (2003). Output-feedback model reference sliding mode control of uncertain multivariable systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.* 48(12): 2245-2250.

Fu, L. C. (1991). New approach to robust MRAC for a class of plants, *Int. J. Contr.*, vol. 53, no. 6, pp. 1359-1375.

Hsu, L. (1990). Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: The general case, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 35, no. 11, pp. 1238-1243.

Hsu, L. (1997). Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 7, pp. 353-372.

Hsu, L., Araújo, A. D. e Costa, R. (1994). Analysis and Design of I/O Based Variable Structure Adaptive Control, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 4-21.

Hsu, L. e Costa, R. (1989). Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: Part I, *Int. J. Contr.*, vol. 49, no. 2, pp. 399-416.

Ioannou, P. A. e Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.

Min, L. J. e Hsu, L. (2000). Sliding controller for output feedback of uncertain nonlinear systems: global and semi-global results, *Proc. 6th IEEE Int. Workshop on Variable Structure Sys.*, (Gold Coast, Australia), pp. 169-178.

Oliveira, J. B. e Araújo, A. D. (2002). Variable structure model reference indirect adaptive control: Indirect VS-MRAC, *Proc. XIV Brazilian Automatic Control Conference, Vol. I, Natal*, pp. 2557-2562.

Oliveira, J. B. e Araújo, A. D. (2004). An indirect variable structure model reference adaptive control applied to the speed control of a three-phase induction motor, *Proc. 2004 American Control Conference*, (Boston) pp. 1946-1951.

Sastry, S. e Bodson, M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall.